相対調和次元 (複素領域上の線型解析)

中井, 三留

数理解析研究所講究録
366巻 1979年 137-149

相対調和次元

名工大　　中井三留

穴あき円板 $\Omega : 0<|z|<1$ で円周 $|z|=1$ を Ω の相対境界 $\partial\Omega$，原点 $z=0$ を Ω の理想境界 $\delta\Omega$ と考える．Ω 内の非退化連続体 K_n の列 $\{K_n\}_1^\infty$ が次の三条件を満足するとき Ω 内の K列と呼ぶ：

(K.1)　$K_n \cap K_m = \phi \quad (n \neq m)$；

(K.2)　$W = \Omega - \bigcup_1^\infty K_n$ は連結，従って，領域である；

(K.3)　$\{K_n\}_1^\infty$ は $\delta\Omega$ に収束する．

領域 $W=\Omega - \bigcup_1^\infty K_n$ の相対境界 ∂W は $\bar{\Omega}$ に関するもの，即ち $\partial W = (\partial\Omega) \cup (\bigcup_1^\infty \partial K_n)$ で W の理想境界 $\delta W = \delta\Omega$ である．W 上の負でない調和函数の族を $HP(W)$，そのうち ∂W で境界値零を持つもの全体を $HP(W;\partial W)$ と記すこと通常通りとする．$a \in W$ を任意に固定するとき正規化条件 $u(a)=1$ を満足する $u \in HP(W;\partial W)$ の全体を $HP(W;\partial W)_1$ と記し，その端点全体を $ex.HP(W;\partial W)_1$，又 $\#A$ で集合 A の濃度をあらわすことにする

とき，Ω の理想境界 $\delta\Omega$ の K列 $\{K_n\}_1^\infty$ に関する相対調和次元を $\dim\{K_n\}$ と記し次式で定義する：

(1) $$\dim\{K_n\} = \#(ex.\, HP(W;\partial W)_1).$$

本稿の目的は次の結果を証明することである：

定理．相対調和次元は任意の零でない高々可算濃度を取ることが出来る．

1．W上のグリーン核を $g(\zeta, z)$ とするとき $g(\zeta,z)/g(\zeta,a)$ を $k(\zeta,z)$ とかきW上のマルチン核とよぶ．$\{z_n\}_1^\infty$ をW内の有理点の全体とするときWの二点の距離を

$$d(\zeta_1,\zeta_2)=\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}|k(\zeta_1,z_n)-k(\zeta_2,z_n)|^*$$

で与える，但し $|\alpha|^*=|\alpha|/(|\alpha|+1)$．W の d による完備化を W^* とするとき，d と $k(\cdot,z)$ は W^* に拡張出来る．各 $p\in W^*$ に対して $W\ni\zeta\to p$ は $z\in W$ に関して広義一様に $k(\zeta,z)\to k(p,z)$ となる事と同等で，そのとき $\overline{W}=W\cup(\partial W)\cup(\delta W)$ 内で ζ は $\overline{W}$ の一点 $\pi(p)$ に収束する．$\pi: W\cup\pi^{-1}(\partial W)\to W\cup(\partial W)$ は位相同型故 $\pi^{-1}(\partial W)$ と ∂W は同一視してよい．$\bar\delta W=\pi^{-1}(\delta W)$ と置けば結局 $W^*=W\cup(\partial W)\cup\bar\delta W$ と考えてよい．$k(p,\cdot)$ が $ex.\,HP(W;\partial W)_1$ に入る $p\in\bar\delta W$ の全体を $\bar\delta_1 W$ と記すと

$$ex.\,HP(W;\partial W)_1=\{k(p,\cdot)\,;\,p\in\bar\delta_1 W\}$$

となり更に M を $\bar{\delta}_1 W$ 上の単位正測度の全体とするとき

$$\mu \longmapsto \tau\mu = \int_{\bar{\delta}_1 W} k(p,\cdot)\,d\mu(p)$$

で定まる写像 $\tau: M \to HP(W;\partial W)_1$ が全単射となることがマルチン理論の基本定理である．これから

(2) $\qquad \dim\{K_n\} = \#(\bar{\delta}_1 W) \geqq 1$

となる事がわかる．従がって $\dim\{K_n\}$ を計算するには $\bar{\delta}_1 W$ の点の数を算えたらよい．$\bar{\delta} W$ の点の数を算える事は難しくない場合が多いので，$\bar{\delta}_1 W$ の点の数を算える為には $\bar{\delta} W$ 中どんな点が $\bar{\delta} W - \bar{\delta}_1 W$ の点であるかを知る事が重要となる．

2．上記目的にかなう判定条件を一つのべる．集合 A の Ω 内での閉被を $\bar{A}$，W^* 内で考えた閉被を A^* と記す．$\{U_n\}_1^\infty$ を $\bar{U}_n \subset \Omega$ となる開円板 U_n の列で

(U.1) $\quad \bar{U}_n \cap \bar{U}_m = \phi \quad (n \neq m)$;

(U.2) $\quad \{\bar{U}_n\}_1^\infty \to 0$

の二条件を満足するものを Ω 内の U列とよぶ．Ω 内の K列 $\{K_n\}_1^\infty$ をとり $W = \Omega - \bigcup_1^\infty K_n$ に対し $V_n = W \cap U_n$，ついで $V = \bigcup_1^\infty V_n$ と置く．

補題．$\bar{\delta} W$ の点 p に対し適当な Ω 内の U列があって p が $(W-V)^*$ に入らないとすると p は $\bar{\delta} W - \bar{\delta}_1 W$ に入る．

事実，$p \notin (W-V)^*$ だから $Z=V\cup(V^*-\bar{V})$ は W^* で p の近傍となる．$W-Z=W-V$ 上 $k(p,\cdot)$，$W-(W-V)=V$ 上 $H^V_{k(p,\cdot)}$ ($\liminf_{V\ni z\to \zeta} s(z) \geqq k(p,\zeta)$ がすべての $\zeta\in(\partial V)\cap W$ に対して成り立つ様な V 上の正値優調和函数 s の族の下被）となる優調和函数を $k(p,\cdot)_{W-V}$ と記すならば，各 V_n で $H^V_{k(p,\cdot)}=H^{V_n}_{k(p,\cdot)}=k(p,\cdot)$ となる事は容易にわかる故 W 上 $k(p,\cdot)_{W-V}=k(p,\cdot)$ となる訳である．もし $p\in\bar{\delta}_1 W$ ならば p の近傍 Z に対し常に $k(p,\cdot)_{W-Z}\neq k(p,\cdot)$ となる事はマルチン理論で周知であるから，$p\notin\bar{\delta}_1 W$ でなければならぬ．

3．以下各 K_n が Ω の半径上の截線となる様な K 列を適当にとるとき $\dim\{K_n\}=$ 自然数 m，又は可算無限濃度 $\aleph$ となる事を示す．有限濃度のときを先ず扱う．

例 1．m を任意の自然数とし以下固定する．$(0,1)$ 内の数列 $\{a_\mu\}_1^\infty$ で $a_{\mu+1}<a_\mu$ $(\mu=1,2,\cdots)$ 及び $\lim_{\mu\to\infty} a_\mu=0$ となるものを任意にとり固定する．次に $(0,1)$ 内の数列 $\{b_\mu\}_1^\infty$ で各 $\mu=1,2,\cdots$ に対し $b_\mu\in(a_{\mu+1},a_\mu)$ となるものを適当に選ぶ．最初に $\theta_\nu=2\pi(\nu-1)/m$ $(\nu=1,2,\cdots,m)$ とし Ω の半径上の截線

$$S_{\mu\nu}=\{z\in\Omega\ ;\ b_\mu<|z|<a_\mu,\ \arg z=\theta_\nu\}$$

を考える $(\mu=1,2,\cdots;\nu=1,2,\cdots,m)$．

$$K_n = S_{\mu\nu} \quad (n=(\mu-1)m+(\nu-1),\ 1\leqq\nu\leqq m)$$

と置けば $\{K_n\}_1^\infty$ は Ω 内の K列である．以下に指定する様に $\{b_\mu - a_{\mu+1}\}_1^\infty$ が十分速く零に収束する様に $\{b_\mu\}_1^\infty$ を選ぶと

(3) $$\dim\{K_n\} = m.$$

4．$U_{\mu\nu}=\{z\in\Omega\,;\ |z-a_\mu e^{i\theta_\nu}|<\delta_\mu\}$ と置き $\{U_{\mu\nu}\}$ が Ω 内の U列となる様に $\{\delta_\mu\}_1^\infty$ をとって固定する．先ず第一の $\{b_\mu\}_1^\infty$ の取り方に対する制約としては常に $a_{\mu+1}<b_\mu<a_{\mu+1}+\delta$ の範囲で考えるとする．正数列 $\{\varepsilon_n\}$ を $\eta_0=\sum_1^\infty\varepsilon_n<+\infty$ となる様にとり $\eta_n=\sum_{n+1}^\infty\varepsilon_n$ とおくと $\eta_n\downarrow 0$ である．Ω の部分集合 A に対し $e^{i\theta}A=\{e^{i\theta}z\,;\ z\in A\}$ と記すことにして

$$\begin{cases}\Omega_n=\Omega-\bigcup_{\nu=1}^m e^{i\theta_\nu}\left(\left(\bigcup_{\mu=1}^n[b_\mu,a_\mu]\right)\cup[0,a_{n+1}]\right)\\ \Omega_\infty=\Omega-\bigcup_{\nu=1}^m e^{i\theta_\nu}\left(\bigcup_{\mu=1}^\infty[b_\mu,a_\mu]\right)=\Omega-\bigcup_1^\infty K_n=W\end{cases}$$

と置く $(n=0,1,\cdots)$．又 $a\in\Omega_\infty$ を固定し a の近傍 D は $\overline{D}\subset\Omega_\infty-\bigcup_1^\infty\overline{U}_n$ となって居る様に固定出来るものとする．Ω_n のグリーン核を $g_n(\zeta,z)$，マルチン核を $k_n(\zeta,z)=g_n(\zeta,z)/g_n(\zeta,a)$ と置く $(n=0,1,2,\cdots,\infty)$．μ について順次 b_μ を十分 $a_{\mu+1}$ に近く取る事により

$$0<g_n(\zeta,z)-g_{n-1}(\zeta,z)<\varepsilon_n\,g_{n-1}(\zeta,z)\quad(z\in D,\ \zeta\in\Omega_n-\overline{U})$$

と出来る $(n=1,2,\cdots)$，たゞし $U=\bigcup_{\mu=1}^\infty\left(\bigcup_{\nu=1}^m U_{\mu\nu}\right)$．従って任意の自然数 l と任意の $n=0,1,\cdots$ に対し

$$0<g_{n+l}(\zeta,z)-g_n(\zeta,z)<\eta_n\, g_n(\zeta,z)\quad(z\in D,\ \zeta\in W-U)$$

となる．これ及びこゝで $l\to+\infty$ としたものを書き換えて

$$(4)\quad\begin{cases} g_n(\zeta,z)\leqq g_{n+l}(\zeta,z)\leqq(1+\eta_n)\,g_n(\zeta,z)\\ g_n(\zeta,z)\leqq g_\infty(\zeta,z)\leqq(1+\eta_n)\,g_n(\zeta,z)\end{cases}$$

が $(\zeta,z)\in(W-U)\times D$ に対して成立する．こゝで (4) の $z=z$ 及び $z=a$ のものゝ商を作ることにより

$$(5)\quad\begin{cases}(1+\eta_n)^{-1}k_n(\zeta,z)\leqq k_{n+l}(\zeta,z)\leqq(1+\eta_n)\,k_n(\zeta,z)\\ (1+\eta_n)^{-1}k_n(\zeta,z)\leqq k_\infty(\zeta,z)\leqq(1+\eta_n)\,k_n(\zeta,z)\end{cases}$$

となる（$(\zeta,z)\in(W-U)\times D$）．これが $\{b_\mu\}_1^\infty$ の選び方に対する第二の制約である．

5．各自然数 n に対し $\bar{\delta}\Omega_n$ と $\bar{\delta}\Omega_0$ の $\delta\Omega$ の十分小な近傍の上の部分である夫々の近傍は位相同型で同一視出来て $\bar{\delta}\Omega_n=\bar{\delta}_1\Omega_n=\{p_j\}_1^m$ $(n=0,1,\cdots)$ として良い事は容易にわかる．Δ_j を Ω 内の角領域 $\theta_j<\arg z<\theta_{j+1}$ $(\theta_{m+1}=\theta_1)$ とするとき Δ_j の頂点が p_j を定めるからである．(5) の第一式で $\Delta_j\ni\zeta\to0$ とすることにより

$$(1+\eta_n)^{-1}k_n(p_j,z)\leqq k_{n+l}(p_j,z)\leqq(1+\eta_n)\,k_n(p_j,z)\quad(z\in D)$$

となる．これは $\lim_{n\to\infty}k_n(p_j,z)=A_j(z)$ $(z\in D)$ の存在を意味する．$\Delta_j-U\ni\zeta\to0$ としたときの $k_\infty(\zeta,z)$ の上及び下極限を夫々 $\overline{A}_j(z)$, $\underline{A}_j(z)$ とすると $(z\in D)$, (5) の第二式から

$$(1+\eta_n)^{-1}k_n(p_j,z) \leqq \underline{A}_j(z) \leqq \overline{A}_j(z) \leqq (1+\eta_n)k_n(p_j,z)$$

となり，ついで $n\to\infty$ として $\underline{A}_j(z)=\overline{A}_j(z)=A(z)$ となる．換言するならば

$$\lim_{\Delta_j-U\ni\zeta\to 0} k_\infty(\zeta,z)=\lim_{n\to\infty} k_n(p_j,z)$$

が存在する（$z\in D$）．$\Delta_j-U\ni\zeta\to 0$ の定める $\overline{\delta}W=\overline{\delta}\Omega_\infty$ の点を q_j と記すことにすると

(6) $\lim_{\Delta_j-U\ni\zeta\to 0} k_\infty(\zeta,z)=k_\infty(q_j,z)$ $(z\in D,\ j=1,2,\cdots,m)$.

$\overline{\delta}W-\{q_j\}_1^m$ の任意の点 q をとると W^* 内で考えて $q\notin(W-U)^*$ だから補題により $q\notin\overline{\delta}_1W$ である．即ち

(7) $$\overline{\delta}_1W\subset\{q_j\}_{j=1}^m.$$

実際には上で等号が成立するのであるが現時点ではそこまではわからない．幾分手軽な態度であろうが上で等号が成立することを証明するかわりに等号の成立が自明となる様に $\{b_\mu\}$ を選ぶことにする．

<u>6</u>．上でのべた所を達成すべく最后に $\{b_\mu\}_1^\infty$ に対する第三の制約をつける．$u_{nj}=k_n(p_j,\cdot)$ とおくとき，u_{nj} は Δ_i $(i\neq j)$ 内では有界であるが，$L_j:\arg z=(\theta_j+\theta_{j+1})/2$ を Δ_j の頂角の二等分線とするとき，$L_j\ni\zeta\to 0$ なら $u_{nj}(\zeta)\to+\infty$ となることに先ず注意しよう．$\mu=1,2,\cdots$ に対し順次 b_μ を $a_{\mu+1}$ に十分近く取ることにより

$$(8) \qquad 0 < u_{nj}(z) - u_{n-1,j}(z) < \varepsilon_n \qquad (z \in \Omega_n - U)$$

と出来る，$\{u_{nj}\}_{n=1}^{\infty}$ は増加列だから (8) により W 上広義一様に $u_j = \lim_{n\to\infty} u_{nj}$ が存在して $u_j \in HP(W;\partial W)$ である．再び (8) により

$$(9) \qquad u_{0j}(z) \leqq u_j(z) \leqq u_{0j}(z) + \eta_0 \quad (z \in W - U)$$

が各 $j = 1, 2, \cdots, m$ について成立する．u_{0j} の性質は (9) により u_j によって受けつがれる．従って

$$\begin{cases} \sup_{\Delta_i - U} u_j < +\infty & (i \neq j) \\ \lim_{L_j \ni z \to 0} u_j(z) = +\infty \end{cases}$$

となる．$HP(W;\partial W)$ の生成する線型空間 $HP(W;\partial W) \ominus HP(W;\partial W)$ の中で考えて $\{u_j\}_{j=1}^{m}$ が一次独立となる事を上の性質は示している．これとマルチンの基本定理と合わせると $\#(ex.\, HP(W;\partial W)_1) \geqq m$ が結論出来る．これと (7) と合わせて (3) が出る．

以上に見て来た如く (3) を結論するために $\{b_\mu\}_{\mu=1}^{\infty}$ に第一から第三までの三個の制約を置いた．$\{b_\mu - a_{\mu+1}\}_1^{\infty}$ が十分速く 0 に收束すればこれら三条件が同時に満たされる事は肝心ながら自明である．

7．次に可算無限濃度のときはどうするかについてのべよう．例 1 及びその証明の思想を踏襲してただ技術的な改変を少々施すだけであるから，証明の細部は省略してのべる．

例2. $(0,1)$ 内の数列 $\{a_n\}_1^\infty$ で $a_{n+1} < a_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 及び $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となるものを固定する. 次に $(0,1)$ 内の数列 $\{b_n\}_1^\infty$ で $b_n \in (a_{n+1}, a_n)$ となるものを以下のべる様に選ぶ. 今一つ $[0, 2\pi)$ 内の数列 $\{\theta_m\}_1^\infty$ で $\theta_1 = 0$, $\theta_m < \theta_{m+1}$, $\lim_{m\to\infty} \theta_m = 2\pi$ となるものを固定する. Ω 内の半径上の截線

$$S_{nm} = \{z \in \Omega;\ b_n < |z| < a_n,\ \arg z = \theta_m\} \quad (n \geqq m)$$

を考える $(n \geqq m;\ n, m = 1, 2, \cdots)$. すると

$$K_k = S_{nm} \quad (k = n(n-1)/2 + m)$$

で定まる $\{K_k\}_{k=1}^\infty$ は Ω 内の K 列である. $\{b_n - a_{n+1}\}_1^\infty$ が以下にのべる如く十分に速く零に収束するならば

(10) $\qquad \dim\{K_k\} = \aleph$ (可算無限濃度).

前例1に於けると同様 $U_{nm} = \{|z - a_n e^{i\theta_m}| < \delta_n\}$ $(n = 1, 2, \cdots;\ m = 1, 2, \cdots, n)$ が Ω 内の U 列となる様に $\{\delta_n\}_1^\infty$ を固定し, $\{b_n\}_1^\infty$ に対しては, 先ず第一の制約として常に $a_{n+1} < b_n < a_{n+1} + \delta_{n+1}$ の範囲で考えるとする.

$$\begin{cases} \Omega_n = \Omega - \left(\bigcup_{\nu=1}^{n}\left(\bigcup_{m=1}^{\nu} e^{i\theta_m}[b_\nu, a_\nu]\right)\right) \cup \left(\bigcup_{m=1}^{n} e^{i\theta_m}[0, a_{n+1}]\right) \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} e^{i\theta_k}[0, a_k]\right) \\ \Omega_\infty = \Omega - \bigcup_{\nu=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m=1}^{\nu} e^{i\theta_m}[b_\nu, a_\nu]\right) = \Omega - \bigcup_{k=1}^{\infty} K_k = W \end{cases}$$

とおき $(n = 1, 2, \cdots)$, g_n, h_n, $\{\varepsilon_n\}_1^\infty$, $\{\eta_n\}_0^\infty$ 及び D, U を例1の同じ記号に対応する同種のものとして定義する. $\{b_n\}_1^\infty$ に対する第二の制約は例1に於けると同様に, (4) 従って (5)

が成立する様に$\{b_n\}_1^\infty$を選ぶ事である．

8. Ω内の角領域Δ_j : $\theta_j < \arg z < \theta_{j+1}$を考える$(j=1,2,\cdots)$部分も例1同様である．各自然数$n$に対し$\bar{\delta}\Omega_n$と$\bar{\delta}\Omega_0$の$\delta\Omega$の近傍の上の部分である夫々の近傍は位相同型で同一視して良いことも例1と同様であるが，今度は$\bar{\delta}\Omega_n = \bar{\delta}_1\Omega_n = \bar{\delta}\Omega_0 = \bar{\delta}_1\Omega_0 = \{p_1, p_2, \cdots, p_\infty\}$ $(n=1,2,\cdots)$と考えるのである．こゝにp_jはΔ_jの頂点が定めるものであり$(j=1,2,\cdots)$又p_∞は$\bigcap_{n=1}^\infty(\bigcup_{k\geqq n}\Delta_k)$の定めるものである．この点について更に説明を追加するために等角写像$\varphi : \Omega_0 \to \{0<\mu<|w|<1\}$で$\partial\Omega_0 = \partial\Omega$を$|w|=1$に写すものを考える．$\Delta_j$の頂点は$z=0$上の一つの境界要素でそれを$p_j$と考えてよく，$\varphi(p_j)=w_j$とすると$(j=1,2,\cdots)$，$|w|=\mu$上$\arg w_j$が$j$と共に増加なことから$w_j\to w_\infty$と言う極限$w_\infty$を持ち，そこで$w_\infty$に対応する境界要素$\varphi^{-1}(w_\infty)$を$p_\infty$と考えたら良い訳である．さて例1同様

$$(11) \qquad \lim_{\Delta_j - U \ni \zeta \to 0} k_\infty(\zeta, z) = \lim_{n\to\infty} k_n(p_j, z) \quad (j=1,2,\cdots; z\in D)$$

の存在を知り，これの定めるδWの点をq_j $(j=1,2,\cdots)$とする所は例1と全く同様である．違う所は，$\{\zeta_k\}_1^\infty \to 0$を$W-U$の点列で$k_\infty(\zeta_k, z)\to k_\infty(q, z)$とする時$q$はどれかの$q_j$であることが$\{\Delta_j\}$の有限個であることにより例1に於ては自明であったので述べることすらしなかったけれど，今度は少々

の注意位は必要な点である．対角線論法で $\{\zeta_k\}$ をその適当な部分列で置き換えたとして，各 n について $k_n(\zeta_k, z) \to k_n(p_{j(n)}, z)$ $(k\to\infty)$ と仮定して良い．所で $\bar{\delta}\Omega_n$ の近傍はすべて $\bar{\delta}\Omega_0$ のそれと同一視してよかったから $p_{j(n)} = p_j$ $(n=1,2,\cdots,\infty)$ となって居る．もし $j<+\infty$ なら (5) の才二式で $\zeta=\zeta_k$ として $k\to\infty$，ついで $n\to\infty$ とすることにより，

$$k_\infty(q, z) = \lim_{n\to\infty} k_n(p_j, z)$$

となり (11) から $q=q_j$ を知る．$j=\infty$ でも上と同様に

$$k_\infty(q, z) = \lim_{n\to\infty} k_n(p_\infty, z)$$

となり，この式で定まる q を q_∞ とすれば，結局 $W-U \ni \zeta_k \to 0$ のとき $k_\infty(\zeta_k, z)$ は収束するかぎり $k_\infty(q_j, z)$ $(j=1,2,\cdots,\infty)$ のいずれかに収束することがわかった．従って任意の点 q を $\bar{\delta}W-\{q_1, q_2, \cdots, q_\infty\}$ からとると $q\notin(W-U)^*$ であることによると例1と全く同様にして $\bar{\delta}_1 W\subset\{q_1, q_2, \cdots, q_\infty\}$ を知る，すなわち $\dim\{K_k\}\leqq \aleph_0$ がわかる．$u_{nj}=g_n(p_j, \cdot)$ $(j=1,2,\cdots,\infty)$ に対して，例1におけると同様な才三の制約を $\{b_n\}_1^\infty$ につけて，$u_{\infty j}=\lim_{n\to\infty} u_{nj}$ が $W-U$ で $u_{0j}\leqq u_{\infty j}\leqq u_{0j}+\eta_0$ となる様にする．これから族 $\{u_{\infty j}; j=1,2,\cdots,\infty\}$ から任意有限個を取り出したものは $HP(W;\partial W)\ominus HP(W;\partial W)$ の中で一次独立となることがわかる．従って $\dim\{K_n\}$ は有限濃度でなく，最終的には (10) が結論できる．

9. 最后に相対調和次元に関連して疑問に思って居る所，調らべてみたいと思っている所をのべるが，深く考えた結果と言うよりは幾分思いつき的な設問なので無意味又は自明のおそれ無しとしない．

a. 本稿に最も密着した所として，$\dim\{K_n\}=2$（連続体の濃度）となるものが存在するかどうかで未だ明らかになっていない．存在は間違いない所と思うし，又例す，その型のもので $\{\Delta_j\}$ のえらび方をカントール集合の構成の取り除く部分に対応させて作ればよいと思うが $\delta_1 W$ に入る（又は入らぬ）所の解析が未だ出来ていない．

b. $\hat{\mathbb{C}}$ の一般部分領域 W についてもその一つの境界成分を理想境界 δW，$\overline{W}-W-\delta W$ を相対境界 ∂W として，δW の相対調和次元が定義出来る．等角写像論における δW の強，弱，不安定への分類に δW の相対調和次元が重要な不変量となるのではあるまいか．さしあたって $W=\Omega-\bigcup K_n$ の場合 δW は不安定又は弱であるが，それとのかゝわりで $\dim\{K_n\}$ を調らべたい．

c. R をハインズの末端部とし $\{\gamma_n\}$ を互に交らぬ単純解析的閉曲線 γ_n の列で $W=R-\bigcup\gamma_n$ が単葉型となるものとする．R の理想境界 δR のハインズの意味の調和次元と W に於ける δR の相対調和次元は（少く共 $\{\gamma_n\}$ をうまくとれば）

一致するのではあるまいか．この見地からハインズ（調和次元 $n<+\infty$），倉持（調和次元 α），コンスタンチネスク・コルニア（調和次元 2）の例を再構成出来ないか．

d．$K_n=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,z=a_n,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqq 1\}$，$\delta=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,z=0,\ |\mathrm{Im}\,z|\leqq 1\}$，$\{a_n\}_1^\infty$ は真に減少零列，$\{a_{-n}\}_1^\infty$ は真に増加零列とする．$W=\hat{\mathbb{C}}-(\bigcup_{n=1}^\infty K_n)\cup(\bigcup_{n=1}^\infty K_{-n})\cup\delta$ に対して δ の相対調和次元（b 参照）を計算する事は b の設問を調らべる重要な手がかりらしい．